非線型非平衡系の力学としての乱流理論

京大・理　巽　友正

1. 乱流理論の構成

乱流は流体の不規則運動である。流体は速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ に対する運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{Q}\,[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)] \tag{1}$$

に従う。ここに，$\boldsymbol{Q}$ は非線型かつ散逸型の演算子で，時間 t を陽には含まない。この意味で，(1)式に従う流体は非線型かつ非平衡の力学系である。乱流は一見不規則ではあるが，流体運動であることには変りはないので，適当な初期条件と境界条件のもとに，(1)式の解として一意的に決定される。ただ，乱流の場合には，個々の流体運動ではなくその集団の統計法則を取扱いの対象とする点において，通常の流体力学とは異っているのである。

運動方程式(1)の代りに，右辺に偶然外力 $f(\boldsymbol{x}, t)$ を加えた

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{Q}\,[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)] + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2}$$

を考えることがある。この $\boldsymbol{f}$ は，Q の中の散逸項によるエネルギー損失を補給し，乱流を定常状態に維持する役割をもつ。(2)式に従う定常乱流は，(2)式を Langevin 方程式とする一種の Brown 運動を見なすことができる。この偶然外力の存在が乱流にとって本質的なものであって，乱流は一般化された Brown運動として取扱うべきだとする考え方がある。しかし，ここではその考え方は採らず，外力を含まない運動方程式(1)に従う減衰乱流を対象とすることにする。

速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ は，関数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ の張る連続無限次元相空間 Ω の中の一点で表される。$\boldsymbol{\Omega}$空間における確率分布 P を導入し，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ に共役な変数関数を $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ として，特性関係

$$\left.\begin{aligned}\phi\,[\boldsymbol{y}(x), t] &= \langle \exp[\,\mathrm{i}\,(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))\,] \rangle \\ &= \int_\Omega \exp[\,\mathrm{i}\,(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)]\,P(\mathrm{d}\boldsymbol{u})\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \int \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

を定義する。(1)式と確率保存則とから ϕ に対する汎関数方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi\,[\,\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\ t\,] = \mathrm{i} \int (\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{Q}\,[\ \frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial\,\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}\,]\ )\, \phi\,[\,\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}),\, t\,]\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

が導かれる。これが乱流理論の基礎方程式であるHopf方程式で，統計力学におけるLiouville方程式に対応している。

2. 相関とスペクトル

乱流理論では実際には分布や特性関数ではなく，そのモーメントを取扱う。n 次モーメントは，

$$\begin{aligned} M^{(n)}_{\mathrm{ij}\cdots\mathrm{p}} &= \left[\frac{\partial^{n} \phi}{\partial \boldsymbol{y}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}_1)\, \partial \boldsymbol{y}_{\mathrm{j}}(\boldsymbol{x}_2) \cdots\cdots \partial \boldsymbol{y}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}})} \right]_{\boldsymbol{y}=0} \\ &= \mathrm{i}^{\mathrm{n}} < u_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}_1,\, t)\ u_{\mathrm{j}}(\boldsymbol{x}_2,\, t) \cdots\cdots u_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}},\, t) > \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられ， n 個の空間点における速度成分の積平均値を表す。分布の一様性を仮定すれば， $M^{(n)}$ は $(\ n-1\ )$ 個の空間変数 $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$, ……, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{x}_1$ だけの関数となる。 とくに，2次モーメントは，

$$B_{\mathrm{ij}}\,(\,\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1,\, t\,) = <\ u_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}, t)\ u_{\mathrm{j}}\,(\boldsymbol{x}',\ t\,)> \tag{6}$$

と書ける。B_{ij} の Fourier 変換

$$\Phi_{\mathrm{ij}}\,(\,\boldsymbol{k},\, t\,) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_{\mathrm{ij}}\,(\,\boldsymbol{r},\, t\,)\, \exp\,(\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}\,)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{7}$$

をエネルギー・スペクトルという。乱流の場の一様性に加えて等分性をも仮定すると，

$$\Phi_{\mathrm{ij}}\,(\,\boldsymbol{k},\, t\,) = \Phi\,(\,k,\, t\,)\ \Delta_{\mathrm{ij}}(\boldsymbol{k}),\quad \Delta_{\mathrm{ij}}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\mathrm{ij}} - \frac{k_{\mathrm{i}}\, k_{\mathrm{j}}}{k^2} \tag{8}$$

となる。このとき，乱れの運動エネルギー（単位質量当り）は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\, t)|^2 > &= \frac{1}{2}\ B_{\mathrm{ij}}\,(0, t) = \frac{1}{2} \int \Phi_{\mathrm{ij}}\,(\,k, t\,)\ \mathrm{d}\boldsymbol{k} \\ &= \int_0^{\infty} \Phi\,(\,k,\, t\,)\, 4\pi\, k^2\ \mathrm{d}k = \int_0^{\infty} E\,(\,k,\, t\,)\, \mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{9}$$

で表される。すなわち，

$$E(k,t) = 4\pi k^2 \Phi(k,t) \tag{10}$$

は，乱れのエネルギーの波数空間における分布密度を表しており，これをエネルギー・スペクトル関数という。この $E(k,t)$ を求めることが乱流理論の中心課題の一つである。

3. Kolmogorov 理論

乱流は大小さまざまの渦運動から成るが，それぞれの渦は自らの不安定性のために壊れてより小さい渦に転化するから，乱流の中にはより大きい渦からより小さい渦へのエネルギー伝達が行われる。従って，波数空間では低波数領域から高波数領域に向ってのエネルギーの流れが存在する。現実の乱流は全体としては一様でも等方的でもないが，その中の比較時小さい渦群（高波数成分）だけに着目すれば，状態は定常かつ一様等方で（局所等方性仮説），エネルギーの流量 ε と粘性率 ν との二つのパラメターだけで決定されるであろう（局所相似性仮説）。このような状態が実現する波数領域 $\mathrm{k} \gg \mathrm{k}_0$（$\mathrm{k}_0$：例えば $E(\mathrm{k}) = \max$ を与える k）においては，次元解析により，

$$E(k) = \varepsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{5}{4}} E_e\left(k/(\varepsilon/\nu^3)^{\frac{1}{4}}\right)。 \tag{11}$$

さらに，ν の値が極端に小さい（Reynolds 数，$R = u_0/\nu k_0$，$u_0 = (<\boldsymbol{u}^2>)^{\frac{1}{2}}_{t=0}$，が大きい）場合には，上の波数領域の左端に ν の影響の現れない領域（慣性小領域）が出来て，そこでは(11)は，

$$E(k) = A\varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}},\quad A：絶対定数 \tag{12}$$

となる。これがKolmogorov スペクトルである。

Kolmogorov スペクトル(12)は，その導き出し方の一般性の故にしばしば一つの規準スペクトルと考えられ，諸種の乱流理論の結果との比較の対象とされる。極端な場合には，Kolmogorov スペクトルを“導く”ことを目標としていろいろな近似が施される。しかし，上に述べたKolmogorov 理論の構成を見るならば，その根拠となる仮説および適用波数領域と無関係に，その結果のスペクトルを絶対視することは無意味である。

4. 修正準正規分布理論

エネルギー・スペクトルに対する方程式を得るために(4)式の２次モーメントをとると，$\boldsymbol{Q}$ の非線型性のために３次モーメントが現れる。同様に，３次モーメントをとると

4次モーメントが現れる。この事情はどこまでも変らず，未知数の数は常に方程式の数より1個多いので，方程式を閉じさせるためには何らかの完結仮説が必要となる。これまでに提案された完結仮説は数多く，実にその数だけの乱流理論があると言ってよい。

準正規分布理論は，2次および3次モーメントに対する方程式をとり，その中の4次モーメントを正規分布の場合の関係式で2次モーメントと結びつける近似（一種のRPA近似）を採用している。この理論は減衰乱流に対して，R→∞の極限でつぎの二つの漸近スペクトルを与える：

$$\tau = \nu k_0^2 t \ll 1 \text{ のとき,} \quad E(k,t) \approx k^{-2} \tag{13}$$

$$\tau = \nu k_0^2 t \gg 1 \text{ のとき,} \quad E(k,t) \approx k^{-1} \tag{14}$$

これらはいずれもKolmogorovスペクトル(12)とは一致しない。

一方，この理論によるスペクトル方程式の初期値問題を数値的に解いた場合，Rの比較的大きい値に対して，ある波数領域に　たって $E(k,t)$ が負の値をとることが発見された。このことは，漸近スペクトル(14)が現実に到達不可能であることを意味する。これはこの理論の最大の弱点であったが，最近，上の近似に加えて一種のMarkov化近似を用いた修正準正規分布理論が提案され，その理論では上のような矛盾は起らないことが示された。この修正理論の漸近スペクトルは(13), (14)と全く同一である。この理論によるスペクトル方程式の初期値問題の数値計算を，Burgersの1次元モデル乱流について行った結果，$R \geq 16$ に対して，スペクトルが(14)式で表される慣性小領域が存在することが示された。また，エネルギー $\frac{1}{2} < |\mathbf{u}|^2 >$ の減衰則，乱れの伸縮のskewness $S = < (\partial u/\partial x)^3 > / < (\partial u/\partial x)^2 >^{\frac{3}{2}}$ の時間的変化も計算されたが，結果はいずれも $R \to \infty$ における漸近的統計理論の結果とよく一致することが確かめられた。実在の3次元乱流の場合の数値計算は現在進行中であるが，現在までに得られた結果はやはり漸近スペクトル(14)と合致している。

5. おわりに

修正準正規分布理論の有効性が3次元乱流に対しても実証された場合には，一様等分性（減衰）乱流の問題は一応片づいたと言ってよいであろう。その後の問題は，そもそもの乱流理論の発端である平均流を伴う等方性乱流に還らなければならない。